ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

«Поверхностные заряды в теории высших спинов»

Выполнил студент
443 группы
Шушарин Андрей Максимович

____

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Григорьев Максим Анатольевич

____

Допущен к защите
Зав. кафедрой _____________

МОСКВА
2023

Содержание

1 Введение **2**

1.1 Теорема Нётер и калибровочные преобразования 3

1.2 Поверхностные заряды 5

2 Математическое описание **6**

2.1 Вариационный бикомплекс 6

2.2 Описание симметрий теории 7

2.3 От параметров приводимости к поверхностным зарядам 10

2.4 Линеаризация 12

3 Поверхностные заряды в различных теориях **13**

3.1 Поверхностные заряды в общековариантных теориях 13

3.1.1 Явное вычисление для метрики Шварцшильда 16

3.2 Поверхностные заряды в теории высших спинов 17

3.2.1 Описание AdS полей в терминах объемлющего пространства 18

3.2.2 Явное построение поверхностного заряда 19

4 Заключение **23**

5 Благодарности **23**

1 Введение

Широко известно, что симметриям действия соответствуют сохраняющиеся величины. В теории поля это приводят к существованию сохраняющихся токов, таких что $\partial_\mu j^\mu \approx 0$, где $\approx$ означает равенство при выполнении уравнений движения. Интегрирование таких токов по пространственному объёму даёт не зависющую от времени величину, называемую зарядом. Однако, если попытаться найти сохраняющийся ток для калибровочных преобразований по стандартной схеме, то он окажется эквивалентным тривиальному и не приведёт к ненулевому закону сохранения.

Исследования, посвящённые сохраняющимся величинам, отвечающим калибровочным преобразованиям, привели к так называемым законам сохранения низших порядков (lower degree conservation laws), которые позволяют определить сохраняющийся заряд интегрируя не по объёму, а по поверхности [1, 2]. В частности закон сохраения заряда в электродинамике может быть получен из калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Изучению аналогичных объектов, но в более сложных теориях и посвящена эта работа. Такой подход в последнее время вызывает интерес, поскольку позволяет определить законы сохранения для полей на пространствах с границами или с ассимптотическими симметриями в таких теориях как электромагнетизм [3], теория Янга-Миллса [1], гравитация [4], теория высших спинов [5, 6] и прочие.

В работе объясняется концепция поверхностных зарядов и описываются общие способы их построения. Приводятся явные выражения для поверхностных зарядов в различных теориях. Ниже объясняется мотивация для изучения поверхностных зарядов, а также приводится явное вычисление для самой известной калибровочной теории - электродинамики Максвелла. В главе 2 приводятся математические сведения об описании лагранжевых теорий, необходимые для построения поверхностных зарядов в нелинейных теориях.

Глава 3 посвящена поверхностным зарядам в различных теориях. Для гравитации Эйнштейна приводится явное выражение для поверхностного заряда. Также рассматривается свободной теория высших спинов на AdS [7]. Она представляет интерес, поскольку является линеаризацией нелинейной теории взаимодействующих высших спинов [8, 9]. Более подробный обзор можно найти в [10]. С помощью описания AdS полей в терминах объемлющего пространства выражение для поверхностных зарядов получается более коротким, чем его более ранние аналоги [5].

1.1 Теорема Нётер и калибровочные преобразования

Метод построения сохраняющихся величин, отвечающих глобальным симметриям широко известен и носит название метода Нётер, а сам результат (взаимно однозначное соответствие) называется теоремой Нётер. Точная формулировка звучит так [11]: пусть дана физическая теория, описываемая плотностью лагранжиана L, допускающая глобальные симметрии. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между:

1) Классом эквивалентности глобальных непрерывных симметрий L.

2) Классом эквивалентности $n-1$ форм $\mathbf{j}$, таких что $d\mathbf{j} \approx 0$ на уравнениях движения (токами Нётер).

Мы считаем две глобальные симметрии L эквивалентными, если они отличаются на калибровочное преобразование. Два тока эквивалентны, если они связаны соотношением:

$$j'^{\mu} = j^{\mu} + \partial_{\nu} k^{[\mu\nu]} + t^{\mu} \tag{1}$$

где $k^{[\mu\nu]}$ - кососимметричный тензор, а $t^{\mu} \approx 0$ на уравнениях движения.

Попробуем применить обычный метод [12] для построения сохраняющихся зарядов для калибровочного преобразования в простейшей теории - электромагнетизме, лагранжиан которого имеет вид: $L = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, а $F_{\mu\nu}$ определено как $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$

Калибровочное преобразование имеет вид

$$A_{\mu} \to A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda(x) \tag{2}$$

и соответствующая ему вариация лагранжиана оказывается равной:

$$0 = \delta L = \partial_{\mu}\lambda \frac{\partial L}{\partial A_{\mu}} + \partial_{\nu}\partial_{\mu}\lambda \frac{\partial L}{\partial\, \partial_{\nu}A_{\mu}} = (\partial_{\nu}\partial_{\mu}\lambda)F^{\mu\nu} = \partial_{\nu}(\partial_{\mu}\lambda F^{\mu\nu}) - (\partial_{\nu}F^{\mu\nu})\partial_{\mu}\lambda \tag{3}$$

Где во втором равенстве мы воспользовались разложением лагранжиана в первом порядке, а в четвёртом - правилом Лейбница. Слагаемое $(\partial_{\nu}F^{\mu\nu})\partial_{\mu}\lambda \approx$

0, поэтому на уравнениях движения должно выполняться:

$$\partial_\nu (F^{\mu\nu} \partial_\mu \lambda) \approx 0 \tag{4}$$

В итоге мы получили величину

$$j^\nu = (\partial_\mu \lambda) F^{\mu\nu} \tag{5}$$

удовлетворяющую условию:

$$\partial_\nu j^\nu \approx 0 \tag{6}$$

то есть такую, которую в обычном случае следовало бы назвать сохраняющимся током.

Посмотрим на это выражение более внимательно. Снова воспользуемся правилом Лейбница:

$$j^\nu = \partial_\mu (\lambda F^{\mu\nu}) - \lambda \partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{7}$$

В соответствии с нашим определением (1), такой ток эквивалентен тривиальному, так как состоит из производной от кососимметричного тензора $k^{[\mu\nu]} = \lambda F^{\mu\nu}$ и слагаемого, равного нулю на уравнениях движения $t^\nu = \lambda \partial_\mu F^{\mu\nu} \approx 0$, то есть не определяет никакой сохраняющейся величины.

Можно догадаться, как найти сохраняющуюся величину, соответствующую калибровочному преобразованию, если, игнорируя тривиальность тока, попытаться получить из него заряд:

$$H = \int_\Sigma (d^{n-1}x)_\nu j^\nu \approx \int_{\partial\Sigma} (d^{n-2}x)_{\mu\nu} k^{[\mu\nu]} = \int_{\partial\Sigma} (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \lambda F^{\mu\nu} \tag{8}$$

Отсюда видно, что то, что в обычных условиях было бы сохраняющимся зарядом, для калибровочного преобразования оказывается интегралом по поверхности, что и приводит нас к концепции поверхностных зарядов. Однако этот интеграл зависит и от конкретного выбора калибровочного преобразования и от поверхности интегрирования. Обе этих неприятности могут быть устранены при наложении должных условий на калибровочные параметры.

1.2 Поверхностные заряды

В теории поля с набором полей φ^i, описываемой лагранжианом L рассмотрим такой объект $\mathbf{k}$, зависящий от полей, что $d\mathbf{k} = \partial_\mu k^{[\mu\nu]}(d^{n-1}x)_\nu \approx 0$. Тогда интеграл

$$\int_{\partial\Sigma} (d^{n-2}x)_{\mu\nu} k^{[\mu\nu]} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{k} \tag{9}$$

однозначно определяется формой $\mathbf{k}$ и не зависит от поверхности интегрирования.

Форму $\mathbf{k}$, зависящую от полей, удовлетворяющую условию $d\mathbf{k} \approx 0$ мы будем называть поверхностным зарядом.

Существует обобщение теоремы Нётер, которое фокусируется не на сохраняющихся токах, а на сохраняющихся поверхностных зарядах ($(n-2)$-формах). Её формулировка звучит так [11]:

Пусть дана физическая теория, описываемая плотностью Лагранжиана L, обладающая калибровочной симметрией. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между:

1) Классом эквивалентности нетривиальных глобальных параметров приводимости $f(x^\mu)$

2) Классом эквивалентности $(n-2)$-форм $\mathbf{k}$, которые на уравнениях движения удовлетворяют равенству $d\mathbf{k} \approx 0$.

Глобальные параметры приводимости - такие параметры калибровочных преобразований, что при действии калибровочным преобразованием с этим параметрами, поля не меняются, т.е. $\delta_f \varphi^i \approx 0$. Два параметра эквивалентны, если они равны на уравнениях движения, т. е. если $f \approx f'$.

Две $(n-2)$-формы эквивалентны, если на уравнениях движения они отличаются на $d\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ - $(n-3)$-форма

Посмотрим, к чему приведёт эта теорема в случае электродинамики: условие $\delta_\lambda A_\mu \approx 0$ означает, что $\partial_\mu \lambda = 0$, то есть $\lambda = c$. Где c - некоторая константа. Тогда поверхностный заряд перейдёт в $k^{[\mu\nu]} = cF^{\mu\nu}$, и, соответственно, сам заряд (при выборе поверхности интегрирования при r = const и t = const) перейдёт в:

$$H_c = c \int_S E dS \tag{10}$$

Строго говоря, нами получено однопараметрическое семейство зарядов H_c, параметризованное параметром c. Настоящий заряд это "генератор"этого семейства

$$H = \frac{\partial H_c}{\partial c} = \int_S E dS \tag{11}$$

Сопоставляя эту формулу с теоремой Гаусса, можно увидеть, что определённый таким образом заряд совпадает с электрическим.

2 Математическое описание

2.1 Вариационный бикомплекс

Для работы с лагранжевыми теориями принято использовать язык вариационного бикомплекса, который оказывается удобен для описания вариационных задач и в особенности законов сохранения[13, 14]. Используется следующий подход: пространство-время представляется как некоторое (n-мерное) многообразие M. Для каждой точки пространства, множество всех возможных значений поля в этой точке образует некоторое другое многообразие U. Множество возможных точек пространства и множество возможных значений в них выглядит как некоторое новое многообразие E, в котором координатами являются (x^μ, φ^i) координат точек и значений полей. В этом многообразии есть естественный оператор проецирования π, который отображает $E \to M$. В каждой карте на M ограничение многообразия E на эту карту выглядит как $V \times U$, где V - карта на M. Такая конструкция называется локально-тривиальным расслоением $\pi : E \to M$, многообразие M - базой, многообразие U - типичным слоем.

Отображение s, которое точками с координатами x^μ на M ставит в соответствие точки на E с координатами $(x^\mu, s^i(x))$ называется сечением расслоения E. Поля, с которыми мы будем иметь дело, представляются как сечения некоторых расслоений.

Для расслоения множество всех его сечений и производных до n-ного порядка образуют пространство струй n-ного порядка J^nY. Координатами на этом многообразии будут $(x^\mu, \varphi^i, \varphi^i_\mu, \varphi^i_{\mu\nu}, ...)$, где

$$\varphi^i = s^i(x) \qquad \varphi^i_\mu = \partial_\mu s^i(x) \qquad \varphi^i_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu s^i(x) \tag{12}$$

Нас будет интересовать $J^\infty Y$. Это тоже многообразие, оно имеет естественную структуру расслоения:
$\pi_\infty : (x^\mu, \varphi^i, \varphi^i_\mu, \varphi^i_{\mu\nu}, ...) \to x^\mu$. На этом многобразии можно задать дифференциальные формы. Базис для этих дифференциальных форм состоит из $dx^\mu, d\varphi^i, d\varphi^i_\mu, d\varphi^i_{\mu\nu}, ...$. Удобно ввести касательные формы $d_v\varphi$, определяемые выражениями:

$$d_v\varphi^i_{(\mu)} = d\varphi^i_{(\mu)} - \varphi^i_{(\mu)\alpha}dx^\alpha \tag{13}$$

Форма, в которой r раз встречается dx^μ и s раз встречается $d_v\varphi^i_{(\mu)}$ называется (r, s) формой. Общий ранг формы это $p = r + s$. Теперь действие оператора де Рама d, переводящего p форму в $p + 1$ форму, распадается на два: d_h, превращающего (r, s) форму в $(r + 1, s)$ форму и d_v, превращающего (r, s) форму в $(r, s + 1)$ форму. Таким образом $d = d_h + d_v$. Так как $d^2 = 0$, то из такого разбиения следует, что:

$$d_h^2 = 0 \tag{14}$$

$$d_h d_v = -d_v d_h \tag{15}$$

$$d_v^2 = 0 \tag{16}$$

В явном виде операторы d_h и d_v даются выражениям:

$$d_h f = (\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\theta^i_\mu + \frac{\partial f}{\partial \varphi^i_\nu}\varphi^i_{\mu\nu} + ...)dx^\mu = D_\mu f dx^\mu \tag{17}$$

$$d_v f = \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}d_v\varphi^i + \frac{\partial f}{\partial \varphi^i_\mu}d_v\varphi^i_\mu + ... \tag{18}$$

В таком случае плотность лагранжиана L определяет $(n, 0)$ форму $\mathbf{L} = L\, d^n x$.

2.2 Описание симметрий теории

Для нахождения поверхностных зарядов, нас будут интересовать симметрии теории, описываемой на языке вариационного бикомплекса. Симметрии характеризуются преобразованиями, которые сохраняют действие. Инфинитоземальное преобразование в J^0Y имеет вид:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &\to x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \\ \varphi'^{i} &\to \varphi^{i} + b^{i}(x, [\varphi]) \end{aligned} \tag{19}$$

Такие преобразования порождают векторное поле $v = \xi^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + b^{i}\frac{\partial}{\partial \varphi^{i}}$. При переходе к рассмотрению функций на $J^{\infty}Y$ это векторное поле необходимо "продлить". Продолжение будет иметь вид [15]:

$$\bar{v} = \xi^{\mu} D_{\mu} + D_{(\mu)} Q^{i} \frac{\partial}{\partial \varphi^{i}_{(\mu)}} \tag{20}$$

Где $Q^{i} = b^{i} - \xi^{\mu}\varphi^{i}_{\mu}$ - характеристика векторного поля v. На формы на $J^{\infty}Y$ это векторное поле будет действовать производной Ли. По определению [13]:

$$\mathcal{L}_{\bar{v}}\omega = \iota_{\bar{v}} d\omega + d\iota_{\bar{v}}\omega \tag{21}$$

Инвариантность формы ω относительно действия векторного поля $\bar{v}$ означает, что:

$$\mathcal{L}_{\bar{v}}\omega = 0 \tag{22}$$

В дальнейшем будет удобно разделять векторное поле $\bar{v}$ на горизонтальную $\xi^{\mu}D_{\mu}$ и вертикальную $\partial_{(\mu)}Q^{i}\frac{\partial}{\partial \varphi^{i}_{(\mu)}}$ части. С таким разделением условие инвариантности $\mathcal{L}_{\bar{v}}\omega = 0$ можно переписать в виде:

$$\mathcal{L}_{\xi}\omega = \mathcal{L}_{-Q}\omega \tag{23}$$

Где введены следующие обозначения:

$$\mathcal{L}_{\xi} = d_{h}\iota_{\xi} + \iota_{\xi} d_{h} \tag{24}$$

$$\mathcal{L}_{-Q} = d_{v}\iota_{-Q} + \iota_{-Q} d_{v} \tag{25}$$

При этом подстановка вектора ξ определена как (горизонтальная подстановка):

$$\iota_\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial dx^\mu} \tag{26}$$

А вектора $-Q$ как (вертикальная подстановка):

$$\iota_{-Q} = \partial_{(\mu)}(-Q^i) \frac{\partial}{\partial d_v \varphi^i_{(\mu)}} \tag{27}$$

Нас интересует (n,0) форма Лагранжиана и для неё можно ещё больше упростить выражение (23) в силу того, что $\iota_{-Q}\mathbf{L} = 0$ (пространство (n, -1) форм пусто) и $d_h\mathbf{L} = 0$ (пространство (n+1, 0) форм пусто). Таким образом, условие инвариантности $\mathbf{L}$ относительно некоторого преобразования можно представить в виде:

$$\iota_{-Q}(d_v\mathbf{L}) = d_h(\iota_\xi \mathbf{L}) \tag{28}$$

Для сокращения записи удобно ввести оператор $\delta_Q = \iota_Q d_v$, который в явном виде будет действовать как

$$\delta_Q = \partial_{(\mu)} Q^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i_{(\mu)}} \tag{29}$$

В таких обозначениях, условием того, что некоторое преобразование является симметрией лагранжиана является то, что

$$\delta_Q L = \partial_\mu \kappa^\mu \tag{30}$$

Важным свойством оператора δ_Q является выполнение следующего равенства для любого функционала Ξ:

$$\delta_Q \Xi = Q^i \frac{\delta \Xi}{\delta \varphi^i} + \partial_\mu \Theta^\mu(Q, \Xi) \tag{31}$$

Где под $\frac{\delta}{\delta \varphi^i}$ подразумевается производная Эйлера-Лагранжа. Оно получается путём многократного применения правила Лейбница и последующей группировке слагаемых, оказавшихся под производной.

Если теперь в качестве функционала Ξ выбрать лагранжиан L, и определить ток как $j^\mu = \kappa^\mu - \Theta^\mu$, то он будет сохраняться на уравнениях движения, поскольку:

$$\partial_\mu j^\mu = Q^i \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} \approx 0 \tag{32}$$

2.3 От параметров приводимости к поверхностным зарядам

Для описания действия калибровочного преобразования введём следующие обозначения: пусть
f^α - параметры калибровочного преобразования.
$R^i_\alpha = \sum R^{i(\mu_1\mu_2...\mu_n)}_\alpha \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n} = R^{i(\mu)}_\alpha \partial_{(\mu)}$ - некоторые операторы, определяющие соответствующее калибровочное преобразование, то есть

$$\delta_{R^i_f}\varphi = R^i_\alpha(f^\alpha) = R^i_f \tag{33}$$

В силу определения калибровочного преобразования для него выполнено:

$$R^i_f \frac{\delta L}{\delta \phi^i} = \partial_\mu j^\mu_f \tag{34}$$

Так как это равенство выполнено для всех f, то при взятии производной Эйлера-Лагранжа мы получим ноль справа, а слева:

$$R^{+i}_\alpha \frac{\delta L}{\delta \phi^i} = 0 \tag{35}$$

Где операторы R^{+i}_α - операторы, сопряжённые к R^i_α:

$$R^{+i}_\alpha(W_i) = \sum (-1)^n \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}(R^{i(\mu_1\mu_2...\mu_n)}_\alpha W_i) \tag{36}$$

то есть оператор R^{+i}_α получается из R^i_α путём "интегрирования по частям"и "отбрасыванием граничного члена".

В дальнейшем нам будет необходимо следующее свойство операторов R^i_α: пусть W_i, f^α - некоторые наборы функций. Тогда для них верно следующее соотношение:

$$W_i R^i_\alpha(f^\alpha) = f^\alpha R^{+i}_\alpha(W_i) + \partial_\mu S^{\mu i}_\alpha(W_i, f^\alpha) \tag{37}$$

Например, если в в R^i_α содержатся только f и её первые производные:

$$(R^{i()}_\alpha f^\alpha + R^{i\mu}_\alpha \partial_\mu f^\alpha) W_i = f^\alpha R^{i()}_\alpha W_i - f^\alpha \partial_\mu (R^{i\mu} W_i) + \partial_\mu (f^\alpha R^{i\mu}_\alpha W_i) =$$
$$= f^\alpha R^{+i}_\alpha (W) + \partial_\mu S^{i\mu}_\alpha [f^\alpha, W_i] \quad (38)$$

Выбирая теперь $W_i = \frac{\delta L}{\delta \varphi^i}$, в силу соотношения (35), получим:

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^i} R^i_f = \partial_\mu S^\mu \quad (39)$$

Параметры приводимости (reducibility parameters) - такие параметры калибровочных преобразований, что вариация полей при их действии равны нулю на уравнениях движения, т.е:

$$\delta_{R^i_f} \varphi^i = R^i_\alpha (f^\alpha) \approx 0 \Longleftrightarrow R^i_\alpha (f^\alpha) = -\partial_{(\mu)} \left(M^{[j(\nu) i(\mu)]} \partial_{(\nu)} \frac{\delta L}{\delta \phi^j} \right) \quad (40)$$

Для антисимметричного по (i, j) набора функций $M^{[j(\nu)i(\mu)]}$. Для сокращения записей нам будет удобно ввести следующие операторы:

$$M^{+ji}(W_j) = (-\partial)_{(\mu)} (M^{[j(\nu)i(\mu)]} \partial_{(\nu)} W_j) \quad (41)$$

$$M^{ji}(W_j, U_i) = \partial_{(\nu)} W_j M^{j(\nu)i(\mu)} \partial_{(\mu)} U_i \quad (42)$$

$$M^{+ji}(W_j, U_i) = (-\partial)_{(\mu)} (U_i M^{[j(\nu)i(\mu)]} \partial_{(\nu)} W_j) \quad (43)$$

Тогда равенство (40) можно сокращённо записать в виде:

$$R^i_\alpha (f^\alpha) = M^{+ji} \left(\frac{\delta L}{\delta \phi^j} \right) \quad (44)$$

Домножим это определение на $\frac{\delta L}{\delta \varphi^i}$ слева и справа. В силу формулы (39), слагаемое $R^i_\alpha (f^\alpha) \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} = \partial_\mu S^{i\mu} (\frac{\delta L}{\delta \varphi^i}, f)$. Поэтому:

$$\partial_\mu S^{i\mu} \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi^i} \right) = M^{+ji} \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi^j} \right) \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} = (-\partial)_{(\mu)} [M^{[j(\nu)i(\mu)]} \frac{\delta L}{\delta \varphi^j}] \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} = \quad (45)$$

$$-\partial_\mu M^{\mu ji} \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi^j}, \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} \right) + M^{[j(\nu)i(\mu)]} \partial_{(\nu)} \frac{\delta L}{\delta \varphi^j} \partial_{(\mu)} \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} = -\partial_\mu M^{\mu ji} \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi^j}, \frac{\delta L}{\delta \varphi^i} \right)$$

Здесь использовано правило Лейбница при переходе через третье равенство и антисимметричность M при переходе через четвёртое. Таким образом мы получаем, что:

$$\partial_\mu \left(S^{i\mu}(\frac{\delta L}{\delta \varphi^i}, f) + M^{\mu j i}(\frac{\delta L}{\delta \varphi^j}, \frac{\delta L}{\delta \varphi^i}) \right) = 0 \tag{46}$$

Что позволяет нам ввести ток как:

$$j^\mu = S^{i\mu}(\frac{\delta L}{\delta \varphi^i}, f) + M^{\mu j i}(\frac{\delta L}{\delta \varphi^j}, \frac{\delta L}{\delta \varphi^i}) \tag{47}$$

Который удовлетворяет соотношению $\partial_\mu j^\mu = 0$, что в силу алгебраической леммы Пуанкаре означает, что $j^\mu = \partial_\nu k^{[\mu\nu]}$.

2.4 Линеаризация

Как можно было заметить, простой вывод поверхностного заряда в случае электродинамики был возможен из-за того, что теория была линейной. В случае, если теория нелинейная, то можно зафиксировать некоторое фоновое решение $\bar{\phi}^i$ и рассмотреть возбуждения над ним. Тогда симметрии фона будут определять симметрии линеаризованной теории [11]. Чтобы показать это, разложим лагранжиан в ряд по φ:

$$L[\bar{\phi}^i + \varphi^i] = L[\bar{\phi}^i] + \varphi^i_{(\mu)} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{(\mu)}}\bigg|_{\bar{\phi}} + L^{free}[\varphi] + ... \tag{48}$$

После разложения $L[\bar{\phi}^i]$ - просто число, не влияющее на уравнения движения поля φ; $\varphi^i_{(\mu)} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{(\mu)}}$ - полная производная, также не влияющая на уравнения движения; $L^{free}[\varphi]$ - первый значимый (пропорциональный φ^2) член.

Полная теория калибровочная по предположению, а значит для неё выполнено условие:

$$R^i_\alpha(f^\alpha) \frac{\delta L}{\delta \phi^i} = \partial_\mu S^{i\mu}(\frac{\delta L}{\delta \phi^i}, f) \tag{49}$$

Это соотношение тоже можно разложить в ряд по φ, тогда первый ненулевой вклад (снова квадратичный по φ) будет иметь вид:

$$R^i[\bar{\phi}]_\alpha(f^\alpha[\bar{\phi}]) \frac{\delta L^{free}}{\delta \varphi^i} = \partial_\mu S^{i\mu}(\frac{\delta L^{free}}{\delta \varphi^i}, f[\bar{\phi}]) \tag{50}$$

Это означает, что линеаризованная теория с лагранжианом L^{free} калибровочно инвариантна относительно преобразования $\delta_{R^i_f}\varphi^i = R^i_\alpha[\bar{\phi}](f^\alpha[\bar{\phi}])$. Условие того, что какой-то параметр g является параметром приводимости линеаризованной теории выглядит как:

$$R^i_\alpha[\bar{\phi}](g^\alpha) \approx 0 \tag{51}$$

Здесь под $\approx$ подразумевается удовлетворение уравнений движения линеаризованной теории. Если фоновое решение таково, что допускает решения уравнений $R^i[\bar{\phi}]_\alpha(f^\alpha[\bar{\phi}]) = 0$, то $g^\alpha = f^\alpha[\bar{\phi}]$ - параметры приводимости линеаризованной теории.

3 Поверхностные заряды в различных теориях

3.1 Поверхностные заряды в общековариантных теориях

Если рассматривается общековариантная теория, то диффеоморфизмы входят в число её калибровочных преобразований, при этом каждый из них будет задаваться некоторым вектором ξ^μ. Будем придерживаться активной точки зрения на диффеоморфизмы, то есть будем считать, что при преобразовании точка с координатами x^μ переходит в новую точку с координатами $x'^\mu(x^\mu)$ в той же системе координат, т.е:

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{52}$$

При таком преобразовании метрика должна преобразовываться по соответствующему тензорному преобразованию:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x+\xi) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho} = (\delta^\lambda_\mu - \partial_\mu \xi^\lambda)(\delta^\rho_\nu - \partial_\nu \xi^\rho) g_{\lambda\rho} = \\ = g_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda g_{\lambda\mu} \end{aligned} \tag{53}$$

Изменение же значения величины $g_{\mu\nu}$ в точке x оказывается равным:

$$g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda g_{\lambda\mu} - \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{54}$$

В соответствии с обозначениями выше (19), это означает, что $b_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda g_{\lambda\mu}$. А соответствующая характеристика Q оказывается равной:

$$Q_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda g_{\lambda\mu} - \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{55}$$

Что совпадает с определением обычной производной Ли от тензора второго ранга с обратным знаком. Поэтому мы будем обозначать его соответствующе: $Q_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$. Для любого другого поля мы воспользуемся тем же обозначением: $Q^i = -\mathcal{L}_\xi \varphi^i$

Возвращаясь к полученному уже уравнению (28), запишем условие инвариантности лагранжиана:

$$d_h(\iota_\xi \mathbf{L}) = \iota_{-Q}(d_v \mathbf{L}) \tag{56}$$

Выражение для $d_v\mathbf{L}$ известно (первая вариационная формула) [13, 16]

$$d_v \mathbf{L} = E_i d^n x \theta^i + d_h \Theta \tag{57}$$

Где $E_i = \frac{\delta L}{\delta \phi^i}$ - левая часть уравнений движения (Эйлера-Лагранжа), Θ - $(n-1, 1)$ форма, называемая пресимплектическим потенциалом.

В силу утверждения (39) $\iota_{-Q}\mathbf{E} = d_h(\mathbf{S}_\xi)$

Тогда получим:

$$d_h(\iota_\xi \mathbf{L}) = d_h(\mathbf{S}_\xi + \iota_{-Q}\Theta) \tag{58}$$

Откуда следует, что:

$$d_h(\iota_\xi \mathbf{L} - \mathbf{S}_\xi - \iota_{-Q}\Theta) = 0 \tag{59}$$

То есть при введении тока $\mathbf{J}_\xi = \iota_\xi \mathbf{L} - \iota_{-Q}\Theta$ мы получим:

$$d_h \mathbf{J}_\xi = d_h \mathbf{S}_\xi \approx 0 \tag{60}$$

Из этого следует, что $\mathbf{J}_\xi = \mathbf{S}_\xi + d_h \mathbf{Q}_\xi$.

По определению положим:

$$\omega = d_v \Theta \tag{61}$$

Это $(n-1, 2)$ форма, называемая пресимплектической формой.

Для калибровочных теорий рассматривается дополненный вариационный бикомплекс (augmented variational bicomplex [17]), в котором переменными являются не только изначальные поля φ^i, но и несколько копий калибровочных параметров f_a (в нашем случае это означает, что координатами на слое являются не только $g_{\mu\nu}$, но $g_{\mu\nu}$ и ξ^μ_a, индекс a нумерует копии калибровочного параметра). В таком случае можно ввести оператор горизонтальной гомотопии I_ξ, удовлетворяющий следующему соотношению (ω - (r,s) форма и $0 \leq r \leq n-1$) [17]:

$$I_\xi^{r+1}(d_h\omega_\xi) + d_h(I_\xi^r\omega_\xi) = \omega_\xi \tag{62}$$

При этом I_ξ^r даётся выражением:

$$I_\xi^r\omega_\xi = \frac{|\mu|+1}{n-r+|\mu|+1}\partial_{(\mu)}(\xi^\nu\frac{\delta}{\delta\xi^\nu_{(\mu)\lambda}}\frac{\partial\omega_\xi}{\partial dx^\lambda}) \tag{63}$$

где $|\mu|$ означает длину мультииндекса. Подействуем оператором I_ξ^n на $d_h(\mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi)$. Получим:

$$0 = I_\xi^n d_h(\mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi) = \mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi - d_h I_\xi^{n-1}(\mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi) \tag{64}$$

Это значит, что в соответствии с нашим определением, $\mathbf{Q}_\xi$ даётся выражением $I_\xi^{n-1}(\mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi)$. Учтём, что в рассматриваемом случае мы действуем на (n-1, 0) формы и упростим результат, выделив в нём отдельно члены с производными более высокого порядка:

$$I_\xi^{n-1}(\mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi) = \xi^\nu\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\xi^\nu}\frac{\partial}{\partial dx^\mu}(\mathbf{J}_\xi - \mathbf{S}_\xi) + higher\ derivative\ terms \tag{65}$$

Так как $\mathbf{S}_\xi$ и $\iota_\xi\mathbf{L}$ не содержат в себе производной от ξ, $\mathbf{Q}_\xi$ даётся выражением:

$$\mathbf{Q}_\xi = -I_\xi(\iota_{-Q}\Theta) \tag{66}$$

Величина $\mathbf{Q}_\xi$ называется поверхностным зарядом Нётер-Вальда и может быть интересна сама по себе. Так, в работе [18] показано, что с её помощью можно определить энтропию чёрной дыры. Также там приводится общее выражение для вида этого заряда.

В [16] показывается, что выполнено следующее соотношение:

$$\iota_{-Q}\omega \approx d_h \mathbf{k}_\xi \tag{67}$$

Где $\mathbf{k}_\xi$ - (n-2, 1) форма. При этом $\mathbf{k}_\xi$ даётся выражением, содержащим ранее определённые величины: $\mathbf{Q}_\xi$ и Θ

$$\mathbf{k}_\xi = -d_v \mathbf{Q}_\xi + \iota_{-Q}\Theta + total\, derivative \tag{68}$$

Полученная (n-2, 1) форма $\mathbf{k}$ задаёт поверхностный заряд в линеаризованной теории. Для того, чтобы получить непосредственно сохраняющуюся величину, необходимо подставить решение линеаризованных уравнений движения в вертикальную часть этой формы, т.е. если некоторой конфигурации поля $\bar{\phi}$ заряд H, а $d\varphi$ является решением линеаризованных уравнений движения около фона $\bar{\phi}$, то конфигурации $\bar{\phi} + d\varphi$ соответствует заряд $H + \delta H$, причём δH даётся выражением:

$$\delta H[\bar{\phi}, d\varphi] = \int_S \iota_{d\varphi}\mathbf{k} \tag{69}$$

3.1.1 Явное вычисление для метрики Шварцшильда

Воспользуемся полученным результатом для Лагранжиана Эйнштейна - Гильберта:

$$L = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R \tag{70}$$

Калибровочное преобразование имеет вид:

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \tag{71}$$

Явным вычислением, можно показать, что:

$$\Theta^\mu[\delta_\xi g; g] = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G}(2\nabla_\nu \nabla^{(\mu}\xi^{\nu)} - 2\nabla^\mu \nabla_\nu \xi^\nu) \tag{72}$$

$$Q_\xi = -I_\xi \Theta[\delta_\xi g; g] = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\nabla^\mu \xi^\nu (d^{n-2}x)_{\mu\nu} \tag{73}$$

Что при подстановке в формулу (68), даёт нам явное выражение для (n-2,1)-формы поверхностного заряда в теории Эйнштейна-Гильберта:

$$\mathbf{k}_\xi[g;h] = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}(d^{n-2}x)_{\mu\nu}(\xi^\mu \nabla_\sigma h^{\nu\sigma} - \xi^\mu \nabla^\nu h + \xi_\sigma \nabla^\nu h^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} h \nabla^\nu \xi^\mu - h^{\rho\nu}\nabla_\rho \xi^\mu) \tag{74}$$

Рассмотрим, к чему приведёт нас это выражение для метрики Шварцшильда:

$$ds^2[m] = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{75}$$

В этом однопараметрическом семействе метрик, задаваемых массой m, выступающей в роли параметра, возмущение будет определяться изменением этого самого параметра:

$$h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial m}\delta m \tag{76}$$

Явным вычислением легко показать, что:

$$\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{2\delta m}{r}dt^2 + \frac{2\delta m}{r}(1 - \frac{2m}{r})^{-2}dr^2 \tag{77}$$

Выбирая вектор $\xi = \partial_t$, получим выражение для приращения заряда при увеличении параметра m:

$$\delta H_\xi = \int_S d\Omega \frac{\delta m}{4\pi G} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta sin\theta \frac{\delta m}{4\pi G} = \frac{\delta m}{G} = \delta M \tag{78}$$

Интегрируя δH_ξ от метрики Минковского $(H_\xi = 0, m = 0)$ до заданной метрики с $m > 0$, мы получаем, что H - полная энергия Шварцшильдовской чёрной дыры.

3.2 Поверхностные заряды в теории высших спинов

Будем рассматривать свободную теорию высших спинов в пространстве анти-де Ситтера [19] и найдём для неё поверхностный заряд. Интерес к этой теории связан с тем, что в AdS пространстве, в отличии от плоского, возможно построить теорию высших спинов с взаимодействием[8].

3.2.1 Описание AdS полей в терминах объемлющего пространства

n-мерное пространство анти-де Ситтера может быть представлено как гиперболоид, вложенный в объемлющее плоское псевдоевклидово (n+1)-мерное пространство с метрикой:

$$\eta_{AB} = (-, +, ..., +, -) \tag{79}$$

В этом пространстве уравнение гиперболоида выглядит как:

$$\eta_{AB} X^A X^B = -R^2 \tag{80}$$

Где R - параметр, отвечающий за кривизну гиперболоида. В дальнейшем, для простоты будем полагать $R = 1$.

Удобным оказывается описание полей на AdS через объемлющее пространство [20, 21, 19], см. также [22], то есть с помощью их продолжения с поверхности гиперболоида на всё (n+1)-мерное пространство.

Мы будем рассматривать симметричные, бесследовые, бездивергентные поля $\varphi_{A_1 A_2 \dots A_s}$. Для сокращения записи удобно ввести в рассмотрение вектор P относительно группы $o(n-1, 2)$ с компонентами P^A, тогда с ним можно свернуть индексы у поля φ и получить то, что называется производящей функцией:

$$\phi(X, P) = \frac{1}{s!} \sum \varphi_{A_1 \dots A_s} P^{A_1} \dots P^{A_s} \tag{81}$$

Где ϕ рассматривается как функция от X и P. В дальнейшем для сокращения записи будем обозначать $\frac{\partial}{\partial X^A} = \partial_A$.

Спин поля при этом можно выразить как:

$$P^A \frac{\partial \phi}{\partial P^A} = s\phi \tag{82}$$

Физические поля в пространстве анти-де Ситтера будут определены только на поверхности гиперболоида, поэтому от радиальной компоненты удобно избавиться через условие однородности:

$$X^A \partial_A \phi = k\phi \tag{83}$$

Где k - степень однородности, которую мы пока не фиксируем. Это означает, что, если мы введём новые координаты (r, x^μ), где $r = \sqrt{-X^2}$, а x^μ таковы, что $X^A \partial_A x^\mu = 0$, то поле ϕ в этих координатах будет иметь вид:

$$\phi = \phi_0(x^\mu, P) r^k \tag{84}$$

Наложение этих условий позволяет написать систему уравнений на поле ϕ, а именно:

Mass-shell условие:

$$\partial_A \partial^A \phi = 0 \tag{85}$$

Условие бездивергентности:

$$\partial^A \frac{\partial}{\partial P^A} \phi = 0 \tag{86}$$

Условие трансверсальности:

$$X^A \frac{\partial}{\partial P^A} \phi = 0 \tag{87}$$

Условие бесследовости:

$$\frac{\partial}{\partial P^A} \frac{\partial}{\partial P_A} \phi = 0 \tag{88}$$

При наложении дополнительного условия:

$$(X^A \partial_A - s + 2)\phi = 0 \tag{89}$$

У этих уравнений появляется калибровочная инвариантность $\phi \to \phi + P^A \partial_A \lambda$, где параметр λ удовлетворяет условиям (85-89) в которых $s - 2$ заменено на $s - 1$. Более подробное описание данной конструкции и обоснование накладываемых условий может быть найдено в работах [22, 23]

3.2.2 Явное построение поверхностного заряда

Вообще говоря, выражение для поверхностных зарядов в теории высших спинов известно [5]. Однако, приведённое выражение весьма громоздко, а также не обладает относительно изометрий AdS пространства явной инвариантностью. Поэтому нашей задачей будет поиск выражения, которое лишено этих недостатков.

Пусть λ - параметр приводимости, то есть помимо условий (85-89), удовлетворять ещё и условию:

$$P^A\partial_A\lambda = 0 \tag{90}$$

Рассмотрим следующий бивектор:

$$\Psi^{AB} = (\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A\phi, \lambda) + (\frac{\partial}{\partial P_A}\phi, \partial^B\lambda) - (\frac{\partial}{\partial P_A}\partial^B\phi, \lambda) - (\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, \partial^A\lambda) \tag{91}$$

Где скалярное произведение определено как свёртка индексов, например:

$$(\frac{\partial}{\partial P^A}\phi, \lambda) = \varphi_{AB_1\dots B_{s-1}}\lambda^{B_1\dots B^{s-1}} \tag{92}$$

Этот бивектор касателен к гиперболоиду, поскольку $X_A\Psi^{AB} = 0$. Действительно:

$$X_A\Psi^{AB} = (s-2)(\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, \lambda) - X_A(\frac{\partial}{\partial P_A}\partial^B\phi, \lambda) - (s-1)(\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, \lambda) \tag{93}$$

Воспользовавшись во втором слагаемом правилом Лейбница и условием (87), получим:

$$X_A\Psi^{AB} = (s-2)(\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, \lambda) + (\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, \lambda) - (s-1)(\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, \lambda) = 0 \tag{94}$$

Теперь нужно проверить, что эта величина сохраняется, то есть должно быть выполнено условие $\partial_A\Psi^{AB} = 0$. Проверим это:

$$\partial_A\Psi^{AB} = (\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A\phi, \partial_A\lambda) + (\frac{\partial}{\partial P_A}\phi, \partial_A\partial^B\lambda) - (\frac{\partial}{\partial P_A}\partial^B\phi, \partial_A\lambda) - (\frac{\partial}{\partial P_B}\partial_A\phi, \partial^A\lambda) \tag{95}$$

Первое и четвёртое слагаемое сокращаются, а для зануления второго и третьего слагаемых нам понадобится следующее свойство оператора $\frac{\partial}{\partial P^A}$:

$$(\frac{\partial}{\partial P_A}\phi, \lambda) = (\phi, P^A\lambda) \tag{96}$$

Воспользовавшись им во втором слагаемом, получим:

$$(\frac{\partial}{\partial P_A}\phi, \partial_A\partial^B\lambda) = (\phi, \partial^B P^A\partial_A\lambda) = 0 \tag{97}$$

Поскольку $P^A\partial_A\lambda = 0$ как условие приводимости. Аналогично для тертьего.

В качестве предварительного вычисления также выясним, чему равняется $X^C\partial_C\Psi^{AB}$. Рассмотрим первое слагаемое, для остальных результат аналогичный:

$$X^C\partial_C\left(\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A\phi, \lambda\right) = \left(\frac{\partial}{\partial P_B}X^C\partial_C\partial^A\phi, \lambda\right) + \left(\partial^A\frac{\partial}{\partial P_B}\phi, X^C\partial_C\lambda\right) = \left(\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A X^C\partial_C\phi, \lambda\right) - \left(\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A\phi, \lambda\right) + (s-1)\left(\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A\phi, \lambda\right) = (2s-4)\left(\frac{\partial}{\partial P_B}\partial^A\phi, \lambda\right) \quad (98)$$

Соответственно, $X^C\partial_C\Psi^{AB} = (2s-4)\Psi^{AB}$.

Теперь необходимо доказать, что этот бивектор действительно задаёт поверхностный заряд на AdS. Для этого введём в рассмотрение форму

$$\mathbf{K} = \frac{1}{(n-1)!}\varepsilon_{BCA_1\ldots A_{n-1}}\Psi^{BC}dX^{A_1}\ldots dX^{A_{n-1}} \quad (99)$$

Условие $\partial_B\Psi^{BC} = 0$ означает, что

$$d\mathbf{K} = 0 \quad (100)$$

Введёная форма $\mathbf{K}$ - $(n-1)$ форма в объемлющем пространстве, что означает, что и будучи ограниченной на AdS, она останется $(n-1)$ формой. Необходимо найти $(n-2)$ форму, которая будет давать поверхностный заряд на гиперболоиде. Для этого подставим в $(n-1)$ форму векторное поле $X = X^A\partial_A$, которое перпендикулярно к поверхности гиперболоида. Тогда получившаяся $(n-2)$ форма $\mathbf{K}_X = \iota_X\mathbf{K}$ будет претендентом на то, чтобы определять поверхностный заряд на гиперболоиде. Заметим, однако, что в определении формы K_X есть неоднозначность, связанная с тем, что её можно домножать на $(-X^2)^\alpha$, что не скажется при "сужении"на AdS, поскольку на гиперболоиде $-X^2 = 1$. Рассмотрим теперь форму $\hat{\mathbf{K}}^\alpha_X = (-X^2)^\alpha\mathbf{K}_X$ и заметим, что:

$$d\hat{\mathbf{K}}^\alpha_X|_{AdS} = d\mathbf{K}_X|_{AdS} \quad (101)$$

Поскольку при "сужении"на AdS: $-X^2 = 1$ и $X_A dX^A|_{AdS} = 0$. Выберем $\alpha = -\frac{2s+n-6}{2}$ и заметим, что:

$$d((-X^2)^\alpha \mathbf{K}_X) = \mathcal{L}_X(\mathbf{K}(-X^2)^\alpha) - \iota_X d(\mathbf{K}(-X^2)^\alpha) = \\ = \mathcal{L}_X(\mathbf{K}(-X^2)^\alpha) - \iota_X d\mathbf{K}(-X^2)^\alpha - \iota_X(X_A dX^A \mathbf{K}) \quad (102)$$

Воспользуемся теперь тем, что $d\mathbf{K} = 0$ и $X_A dX^A|_{AdS} = 0$.Тогда в (102) пропадёт второе слагаемое, а $\iota_X(X_A dX^A \mathbf{K})$ даст $\mathbf{K}$. То есть при ограничении на AdS формула 102 даст:

$$d((-X^2)^\alpha \mathbf{K}_X)|_{AdS} = \mathcal{L}_X((-X^2)^\alpha \mathbf{K}) - \mathbf{K} \quad (103)$$

Вычислим теперь $\mathcal{L}_X((-X^2)^\alpha \mathbf{K})$. Для сокращения записи введём следующее обозначение: $(-X^2)^\alpha \Psi^{AB} = \hat{\Psi}^{AB}$. Тогда:

$$\mathcal{L}_X(\mathbf{K}(-X^2)^\alpha) = X^A \partial_A \hat{\Psi}^{BC} \varepsilon_{BCA_1 \ldots A_{d-1}} dX^{A_1} \ldots dX^{A_{n-1}} + \\ + \hat{\Psi}^{BC} \varepsilon_{BCA_1 \ldots A_{n-1}} \partial_D X^{A_1} dX^D \ldots dX^{A_{n-1}} + \ldots + \hat{\Psi}^{BC} \varepsilon_{BCA_1 \ldots A_{n-1}} dX^{A_1} \ldots \partial_D X^{A_{n-1}} dX^D = \\ = (2\alpha + 2s + n - 5)\mathbf{K} \quad (104)$$

Поскольку $X^C \partial_C \hat{\Psi}^{AB} = (2\alpha + 2s - 4)\hat{\Psi}^{AB}$. Тогда выражение 103 переходит в

$$\mathcal{L}_X(\mathbf{K}(-X^2)^\alpha) - \mathbf{K} = (2\alpha + 2s + n - 6)\mathbf{K} = 0 \quad (105)$$

В силу выбора $\alpha = -\frac{2s+n-6}{2}$. Итого, поскольку значение $d\hat{\mathbf{K}}^\alpha_X|_{AdS}$ не зависит от α, но равно 0 при нашем выборе α, следует, что $d\mathbf{K}_X|_{AdS} = 0$. Таким образом форма, определяющая поверхностный заряд на пространстве анти-де Ситтера выглядит как:

$$\mathbf{K}_X = \iota_X \mathbf{K} \quad (106)$$

4 Заключение

В работе изучались поверхностные заряды в различных теориях. Во введении была объяснена мотивация для их изучения, а также приведено вычисление для электродинамики Максвелла.

Вторая глава работы посвящена описанию математических концепций, используемых для изучения полей, их симметрий и сохраняющихся величин. Приводится описание вариационного бикомплекса и объяснение того, как параметры приводимости теории соотносятся с поверхностными зарядами. Для нелинейных теорий объясняется процесс линеаризации и поиска параметров приводимости в линеаризованной теории.

Третья глава работы посвящена установлению конкретного вида поверхностных зарядов в различных теориях. Для общековариантных теорий приводится выражение для $(n-2, 1)$ формы, которая даёт поверхностный заряд в линеаризованной теории. В качестве иллюстрации применения этого известного результата, путём вычисления этой формы для метрики Шварцшильда, показано, что этот поверхностный заряд определяет энергию чёрной дыры.

В теории высших спинов предлагается выражение для поверхностного заряда в терминах объемлющего пространства 106, которое явно содержит $o(n-1, 2)$ симметрию пространства анти-де Ситтера и поэтому является усовершенствованием результата, полученного во внутренних терминах, в котором эта симметрия была лишь неявно [5]. Тем не менее, данный результат получен в частичной калибровке поля ϕ и в дальнейшем может быть усовершенствован путём его нахождения в случае, когда частичная калибровка снята.

5 Благодарности

Хочу поблагодарить Е.Д. Скворцова и М.А. Григорьева за интерес, проявленный к этой задаче и обсуждение формулы 91

Список литературы

[1] L.F. Abbott and Stanley Deser. Charge Definition in Nonabelian Gauge Theories. *Phys.Lett.*, B116:259, 1982.

[2] L.F. Abbott and Stanley Deser. Stability of Gravity with a Cosmological Constant. *Nucl.Phys.*, B195:76, 1982.

[3] Ernesto Frodden and Diego Hidalgo. Surface Charges for Gravity and Electromagnetism in the First Order Formalism. *Class. Quant. Grav.*, 35(3):035002, 2018.

[4] Robert M. Wald and Andreas Zoupas. A General Definition of Conserved Quantities in General Relativity and Other Theories of Gravity. *Phys. Rev.*, D61:084027, 2000.

[5] G. Barnich, N. Bouatta, and M. Grigoriev. Surface charges and dynamical Killing tensors for higher spin gauge fields in constant curvature spaces. *JHEP*, 10:010, 2005.

[6] V. E. Didenko, N. G. Misuna, and M. A. Vasiliev. Charges in nonlinear higher-spin theory. 2015.

[7] Christian Fronsdal. Massless Fields with Integer Spin. *Phys.Rev.*, D18:3624, 1978.

[8] Mikhail A. Vasiliev. CONSISTENT EQUATIONS FOR INTERACTING MASSLESS FIELDS OF ALL SPINS IN THE FIRST ORDER IN CURVATURES. *Annals Phys.*, 190:59–106, 1989.

[9] Mikhail A. Vasiliev. Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions. *Phys. Lett.*, B243:378–382, 1990.

[10] V.E. Didenko and E.D. Skvortsov. Elements of Vasiliev theory. 2014.

[11] Glenn Barnich and Friedemann Brandt. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges. *Nucl. Phys.*, B633:3–82, 2002.

[12] В.А. Рубаков. *Классические калибровочные поля: Бозонные теории.* КомКнига, 2005.

[13] I.M. Anderson. The variational bicomplex. Technical report, Formal Geometry and Mathematical Physics, Department of Mathematics, Utah State University, 1989.

[14] Glenn Barnich, Friedemann Brandt, and Marc Henneaux. Local BRST cohomology in gauge theories. *Phys.Rept.*, 338:439–569, 2000.

[15] Glenn Barnich. *Symetries en theorie classique des champs. Approche cohomologique.* 2000.

[16] Geoffrey Compère and Adrien Fiorucci. Advanced Lectures on General Relativity. 1 2018.

[17] Geoffrey Compere. *Symmetries and conservation laws in Lagrangian gauge theories with applications to the mechanics of black holes and to gravity in three dimensions.* PhD thesis, Brussels U., 2007.

[18] Vivek Iyer and Robert M. Wald. Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Phys. Rev.*, D50:846–864, 1994.

[19] Christian Fronsdal. Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7. *Phys. Rev.*, D20:848–856, 1979.

[20] P.A.M. Dirac. The Electron Wave Equation in de Sitter Space. *Annals Math.*, 36:657–669, 1935.

[21] R. R. Metsaev. Massless mixed symmetry bosonic free fields in d- dimensional anti-de Sitter space-time. *Phys. Lett.*, B354:78–84, 1995.

[22] Glenn Barnich and Maxim Grigoriev. Parent form for higher spin fields on anti-de Sitter space. *JHEP*, 08:013, 2006.

[23] Konstantin B. Alkalaev and Maxim Grigoriev. Unified BRST description of AdS gauge fields. *Nucl. Phys.*, B835:197–220, 2010.